Presburger Arithmetic

Discrete Mathematics Assignment

2013210061 채윤병

Presburger arithmetic (Pa)은 자연수와 덧셈에 대한 First order logic이다. 1929년 그것을 발견한 Mojżesz Presburger의 이름을 땄다. Peano arithmetic이나 Robinson arithmetic과는 달리 곱셈에 대해서는 생각하지 않고 덧셈에 대한 자연수의 성질에 관한 것이다. 덧셈에 대해서만 다루기 때문에 Peano arithmetic보다는 범주가 좁지만, Decidable theory라는 특징이 있다. 알고리즘을 이용해서 해결 가능한 (solvable) 산술이므로 Presburger axiom을 통해 모든 문장이 증명이 가능하다(provable). 즉 자기 자신이 자기 자신이 무모순일 수 있음을 증명할 수 있기 때문에 의의가 괴델의 불완전성 정리에 관점에서 본다면 반례가 되는 것이다.

앞서 말했던 것처럼 Pa은 자연수와 덧셈에 관한 체계(system or formula)인데 곱셈을제외했기 때문에 우리가 알고 있는 자연수와는 완벽히 일치하지 않다.(Peano Arithmetic은 우리가 알고 있는 자연수를 표현하는 산술이다) 하지만 스스로 무모순임을 증명할 수 있는 산술 체계임을 감안하면 의의가 있다. 또 곱셈은 덧셈의 연속이기 때문에 곱셈으로도 확장될 수 있다.

Presburger arithmetic의 정확한 범위는 상수 0과 1과 더하기인 이진 함수 +를 포함한다 {0,1,+}. Presburger arithmetic의 공리 체계는 다음과 같다.

1. ¬(0 = *x* + 1)
2. *x* + 1 = *y* + 1 → *x* = *y*
3. *x* + 0 = *x*
4. *x* + (*y* + 1) = (*x* + *y*) + 1
5. Let *P*(*x*) be a first-order formula in the language of Presburger arithmetic with a free variable *x* (and possibly other free variables). Then the following formula is an axiom:

(*P*(0) ∧ ∀*x*(*P*(*x*) → *P*(*x* + 1))) → ∀*y* *P*(*y*).

Mojżesz Presburger는 Pa가 Pa는 Quantifier elimination(Qe)을 통해 증명될 수 있다. Qe는 말그대로 Quantifier을 없애는 것이다. 다음을 예로 들자.

∃ x (x + x + 1 = y) & (x + z = 0)

이 논리는 수량사를 없애면서 다음과 같이 표현할 수 있다.

y ≡2 1 & y + z = 1 (≡2 는 2로 나눈 나머지를 나타내는 기호다.)

Fischer와 Rabin은 1974년에 Pa의 최악의 경우 시간이 2^2cn이 걸리는 것을 증명했다. Pa를 통해 증명할 수 있는 Sentence로 두가지 예가 있다.

1. 모든 수는 홀수 또는 짝수로 이루어져 있다.  
   for all *x*, there exists *y* : (*y* + *y* = *x*) ∨ (*y* +*y* + 1 = *x*)
2. 자연수는 무수히 많다.  
   for all *x*, there exists *y* : (x+1 =y)

Pa는 컴퓨터 과학에서 의의가 크다. 튜링의 정지 문제는 해결 불가능한 문제라 알고리즘을 짤 수가 없지만 Pa 체계에서 쓰여진 문장들은 알고리즘을 통해 컴퓨터가 참 또는 거짓이라는 것을 인식할 수 있다. 이는 정리증명기와 관련이 깊다. 그 예로 Coq proof assistant,  Isabelle proof assistant 등이 있고 이들은 수학적 증명이나 실행 가능한 알고리즘을 기술하는 언어를 제공한다. 실제로 이러한 기술들은 Amd, Intel 등의 회사에서 만든 최신 프로세서에서 분리된 다른 작동이 정확한지 검증하기 위해 쓰인다. 또 정리증명기가 1차 논리, 즉 문장으로 표현된 논리를 컴퓨터가 참, 거짓을 판명할 수 있다면 자연어 처리나 인공지능의 딥러닝을 연구하는 데에도 도움이 될 수 있을 것으로 보인다.

Pa는 Solvable하므로 알고리즘으로 표현할 수 있지만 다차시간으로 표현하기 어렵기 때문에 P(x)의 길이 n의 길이에 따라 시간이 크게 바뀐다. 지수시간 알고리즘이므로 해결은 할 수 있으나 오랜 시간이 걸리기 때문에 다루기 힘든 알고리즘에 속한다.

인용

From Wikipedia, the free encyclopedia <Presburger arithmetic>

Louis Latour, <Presburger Arithmetic : From Automata to Formulas>, 2005–2006, 1페이지

From Wikiwand , <계산 가능성 이론>

Ryan Stansifer <Presburger’s Article on Integer Airthmetic: Remarks and Translation> , TR84-639

1984 September